فصل سوم: ساده سازی توابع منطقی

- چرا تابع را ساده می کنیم؟
  - عبارت ساده شده از گیت های کمتری استفاده می کند.
  - بنابراین ارزانتر، با مصرف توان کمتر وبعضاً سریعتر خواهد بود.

تکنیک های ساده سازی

- ساده سازی جبری (Algebraic Simplification)
  - ساده سازی با استفاده از اصول وقضایای جبر بول صورت می گیرد.
  - نیاز به مهارت داردولی انعطاف زیادی دارد.
- دیاگرام کارنو(Karnaugh Maps)
  - روش دیاگرامی برای ساده سازی است که اساس آن دیاگرام ون است
  - روش ساده ای می باشد.
  - تابع را بفرم استاندارد ساده می کند.
  - محدود به ساده سازی توابع حداکثر ۶ متغییره است.
- روش جدول بندی Quine-McCluskey
  - یک نوع روش حذفی است.
  - ساده سازی را بفرم استاندارد انجام می دهد.
  - روش تکراری وکسل کننده است.
  - برای انسان خسته کننده ولی روشی مناسب برای کامپیوتر است.
  - برای توابع با متغییر بیشتر قابل اجراست ولی حجم عملیات بسیار زیاد خواهد بود.

ساده سازی جبری

- هدف به حداقل رساندن:
  - (i)تعداد لیترال ها
  - (ii) تعداد ترم ها
- عیب: نیاز به مهارت خوبی در عملیات جبری واستفاده از اصول و قضایا دارد.
- مزیت: برای رسیدن به فرم مطلوب بسیار انعطاف دارد.
- مثال:

$(x+y)(x+y')(x'+z)$	(6 literals)
$= (xx+xy'+xy+yy')(x'+z)$	(assoc.)
$= (x+x(y'+y)+0)(x'+z)$	(idemp.,assoc., compl.)
$= (x+x(1)+0)(x'+z)$	(complement)
$= (x+x+0)(x'+z)$	(identity 1)
$= (x)(x'+z)$	(idemp, identity 0)
$= (xx'+xz)$	(assoc.)
$= (0+xz)$	(complement)
$= xz$	(identity 0)

تعداد لیترال ها از ۶ به ۲ کاهش یافت.

- فرم مینیمم SOP و POS تابع زیر را پیدا کنید

$f(x,y,z) = x'y(z + y'x) + y'z$

$x'y(z+y'x) + y'z$

$= x'yz + x'yy'x + y'z$ (distributivity)

$= x'yz + 0 + y'z$ (complement, null element 0)

$= x'yz + y'z$ (identity 0)

$= x'z + y'z$ (absorption)

$= (x' + y')z$ (distributivity)

Minimal SOP of f = **$x'z + y'z$** (2 2-input AND gates and 1 2-input OR gate)

Minimal POS of f = **$(x' + y')z$** (1 2-input OR gate and 1 2-input AND gate)

- فرم مینیمم SOP تابع زیر را پیدا کنید

$f(a,b,c,d) = abc + abd + a'bc' + cd + bd'$

$abc + abd + a'bc' + cd + bd'$

$= abc + ab + a'bc' + cd + bd'$ (absorption)

$= abc + ab + bc' + cd + bd'$ (absorption)

$= ab + bc' + cd + bd'$ (absorption)

$= ab + cd + b(c' + d')$ (distributivity)

$= ab + cd + b(cd)'$ (DeMorgan)

$= ab + cd + b$ (absorption)

$= b + cd$ (absorption)

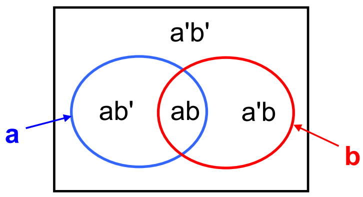
تعداد لیترالها از ۱۳ به ۳ کاهش یافت.

دیاگرام کارنو (Karnaugh Maps)

- یک روش سیستماتیک برای بدست آوردن فرم ساده شده SOP می باشد.
- هدف: کمترین تعداد لیترالها / ترمها.
- روش دیاگرامی بر اساس فرم خاصی از دیاگرام ون (*Venn diagram*) *می باشد*
- مزیت: روشی ساده است.
- عیب: به حداکثر ۵ یا ۶ متغییر محدود است.

❖ Venn Diagrams

- دیاگرام ون روشی برای نمایش فضای مینترم ها است.
- مثال: ۲ متغییر (۴ مینترم)

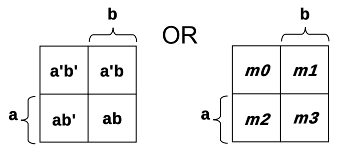


2-variable K-maps

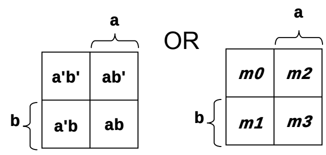
- ❖ در جدول کارنو که فرم خلاصه شده دیاگرام ون است ، هر خانه نشانگر یک مینترم است
- ❖ هر خانه با خانه مجاور خود فقط در یک لیترال تفاوت دارد (برای ساده سازی قضیه unifying می تواند اعمال گردد: a + a' = 1)

فرمها مختلف جدول کارنوی دو متغیره در زیر نشان داده شده است :

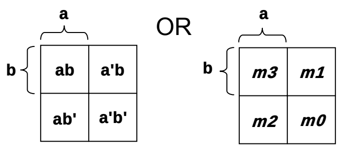
Alternative 1:



Alternative 2:

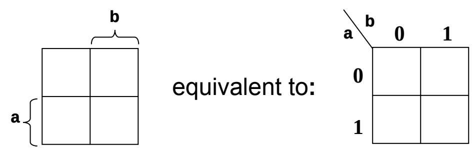


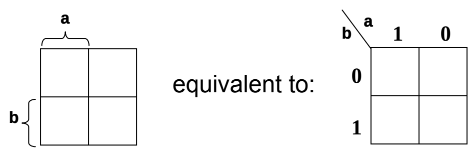
Alternative 3:



and others…

2-variable K-maps





3-variable K-maps

- برای سه متغییر (a, b, c) ۸ مینترم وجود داردبنابراین در 3-variable K-map ۸ سلول وجود خواهد داشت.

a \ bc	00	01	11	10
0	a'b'c'	a'b'c	a'bc	a'bc'
1	ab'c'	ab'c	abc	abc'

OR

a \ bc	00	01	11	10
0	*m0*	*m1*	*m3*	*m2*
1	*m4*	*m5*	*m7*	*m6*

Note *Gray code* sequence

جدول فوق طوری است که سلولهای مجاور فقط در یک لیترال تفاوت دارند. فرمهای دیگری که این ترتیب را رعایت کنند نیز می تواند استفاده گردد.

3-variable K-maps

- جدول دارای خاصیت wrap-around می باشد:

❖ a'b'c' (*m0*) مجاور a'bc' (*m2*) می باشد.
❖ ab'c' (*m4*) مجاور abc' (*m6*) می باشد.

a \ bc	00	01	11	10
0	*m0*	*m1*	*m3*	*m2*
1	*m4*	*m5*	*m7*	*m6*

در جدول سه متغییره هر خانه دارای سه خانه مجاور است. در حالت کلی در جدول n متغییره ، هر خانه دارای n خانه مجاور خواهد بود.
در جدول فوق m0 سه مجاور دارد: m1 , m2 , m4

تمرین ۱-۳

1. The K-map of a 3-variable function *F* is shown below. What is the sum-of-minterms expression of *F*?

a \ bc	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	1	0	0

2. Draw the K-map for this function A:
   $A(x, y, z) = x.y + y.z' + x'.y'.z$

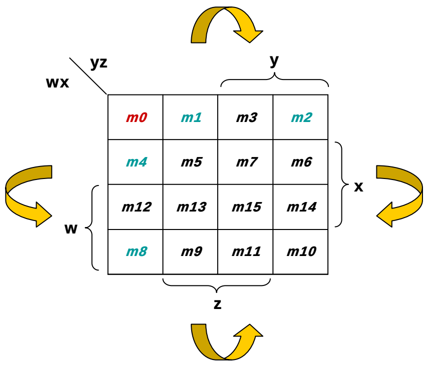
4-variable K-maps

- There are 16 cells in a 4-variable (w, x, y, z) K-map.

wx \ yz	00	01	11	10
00	*m0*	*m1*	*m3*	*m2*
01	*m4*	*m5*	*m7*	*m6*
11	*m12*	*m13*	*m15*	*m14*
10	*m8*	*m9*	*m11*	*m10*

4-variable K-maps

- دو خاصیت wrap-arounds در جدول ۴ متغییره وجود دارد : بصورت افقی و عمودی
- هر سلول دارای چهار مجاور خواهد بود . بعنوان مثال خانه متناظر با *m0* با خانه های *m1* ، *m2* ، *m4* و *m8* مجاور است.



5-variable K-maps

- بطور معمول بصورت دو جدول چهار متغییره در نظر گرفته می شود:

A '

BC \ DE	00	01	11	10
00	*m0*	*m1*	*m3*	*m2*
01	*m4*	*m5*	*m7*	*m6*
11	*m12*	*m13*	*m15*	*m14*
10	*m8*	*m9*	*m11*	*m10*

A

BC \ DE	00	01	11	10
00	*m16*	*m17*	*m19*	*m18*
01	*m20*	*m21*	*m23*	*m22*
11	*m28*	*m29*	*m31*	*m30*
10	*m24*	*m25*	*m27*	*m26*

خانه هایی که در موقعیت متناظر هستند با هم همجوار محسوب می شوند.
می توان دو جدول را روی یکدیگر در نظر گرفت.

K-map های بزرگتر

• جدول های بیش از شش متغییر استفاده نمی شود(تشخیص گروههای همجوار توسط چشم مشکل می گردد)
•جدول شش متغییره را می توان بصورت چهار جدول چهار متغییره در نظر گرفت .

cd \ ef	a'b' 00	a'b' 01	a'b' 11	a'b' 10	a'b 10	a'b 11	a'b 01	a'b 00	ef / cd
00	m0	m1	m3	m2	m18	m19	m17	m16	00
01	m4	m5	m7	m6	m22	m23	m21	m20	01
11	m12	m13	m15	m14	m30	m31	m29	m28	11
10	m8	m9	m10	m11	m26	m27	m25	m24	10
a 10	m40	m41	m43	m42	m58	m59	m57	m56	10
a 11	m44	m45	m47	m46	m62	m63	m61	m60	11
a 01	m36	m37	m39	m38	m54	m55	m53	m52	01
a 00	m32	m33	m35	m34	m50	m51	m49	m48	00
cd / ef	ab' 00	ab' 01	ab' 11	ab' 10	ab 10	ab 11	ab 01	ab 00	ef / cd

تمرین : عبارت زیر را ساده کنید Σ m(6,8,14,18,23,25,27,29,41,45,57,61)

ساده سازی با استفاده از K-maps

- اساس ساده سازی قضیه Unifying می باشد:

A + A' = 1

- در K-map هر خانه شامل ۱ متناظر با یکی از مینترمهای تابع است
- هر گروه مجاور از ۱ ها (اندازه هر گروه باید توانی از ۲ باشدیعنی : ۱، ۲، ۴، ۸،....) متناظر با یک عبارت ساده تر product term از تابع می باشد.
  - ۲ خانه همجوار ۱ متغیر را حذف می کند.
  - ۴ خانه همجوار ۲ متغیر را حذف می کند.
  - ۸ خانه همجوار ۳ متغیر را حذف می کند.
  - 2^n خانه همجوار n متغیر را حذف می کند.
- تا حد امکان باید گروه های بزرگ انتخاب کرد. بزرگتر بودن گروههای انتخاب شده تعداد لیترال ها را در جملات ضربی کاهش می دهد.
- تا حد امکان تعداد گروهها برای پوشش تمام ۱ ها باید حد اقل باشد. گروههای کمتر به معنی جملات ضربی کمتر در تابع ساده شده می باشد.

ساده سازی با استفاده از K-maps

- Example:

$$F(w,x,y,z) = w'xy'z' + w'xy'z + wx'yz' + wx'yz + wxyz' + wxyz = \Sigma\, m(4, 5, 10, 11, 14, 15)$$

wx \ yz	00	01	11	10
00				
01	1	1		
11			1	1
10			1	1

برای وضوح بیشتر خانه های
با مقدار ۰ نمایش داده نمی شود

ساده سازی با استفاده از K-maps

- در اینجا دو گروه از مینترمها وجود دارد، A و B :

$$A = w'xy'z' + w'xy'z = w'xy'(z' + z) = w'xy'$$

$$B = wx'yz' + wx'yz + wxyz' + wxyz = wx'y(z' + z) + wxy(z' + z) = wx'y + wxy = w(x'+x)y = wy$$

F(w,x,y,z) = A + B = w'xy' + wy
(SOP)

wx \ yz	00	01	11	10
00				
01	1	1		
11			1	1
10			1	1

ساده سازی با استفاده از K-maps

- گروههای بزرگتر متناظر product term با لیترالهای کمتر می باشند.برای جدول چهار متغییره داریم :

1 cell = 4 literals, e.g.: wxyz, w'xy'z

2 cells = 3 literals, e.g.: wxy, wy'z'

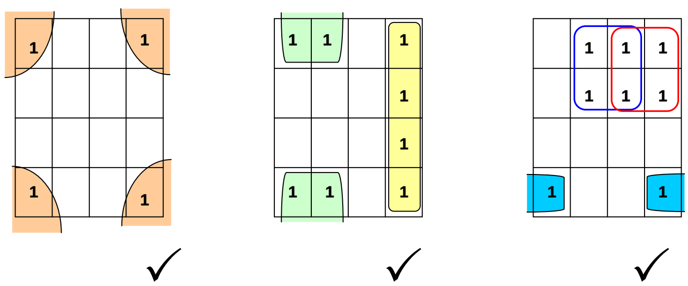
4 cells = 2 literals, e.g.: wx, x'y

8 cells = 1 literal, e.g.: w, y', z

16 cells = no literal, e.g.: 1

ساده سازی با استفاده از K-maps

- نمونه هایی از گروه بندی های معتبر می تواند بصورت زیر باشد:



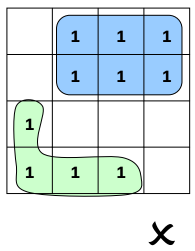
ساده سازی با استفاده از K-maps

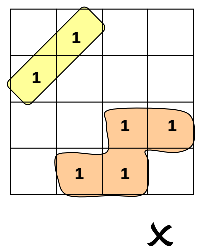
- گروه مینترمها باید :

۱) مستطیلی باشد.

۲) تعداد خانه ها توانی از ۲ باشد.

در غیر این صورت گروه نامعتبر خواهد بود. مثال:





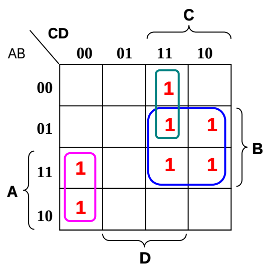
تبدیل به فرم جمع مینترمها

اگر تابع به فرم کانونیک جمع مینترم باشد براحتی در جدول کارنو وارد می شود. اگر تابع به فرم دیگری باشد باید به فرم جمع مینترم یا فرم استاندارد SOP تبدیل گردد:

- Example:

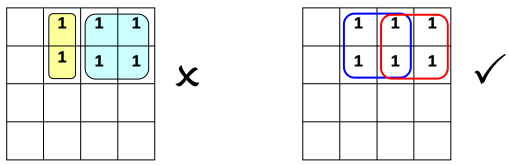
$$f(A,B,C,D) = A(C+D)'(B'+D') + C(B+C'+A'D)$$
$$= A(C'D')(B'+D') + BC + CC' + A'CD$$
$$= \underline{AB'C'D'} + \underline{AC'D'} + \underline{BC} + \underline{A'CD}$$

AB'C'D' + AC'D' + BC + A'CD
= AB'C'D' + AC'D'(B+B') + BC + A'CD
= AB'C'D' + ABC'D' + AB'C'D' + BC(A+A') + A'CD
= AB'C'D' + ABC'D' + ABC + A'BC + A'CD
= AB'C'D' + ABC'D' + ABC(D+D') + A'BC(D+D') + A'CD(B+B')
= AB'C'D' + ABC'D' + ABCD + ABCD' + A'BCD + A'BCD' + A'B'CD



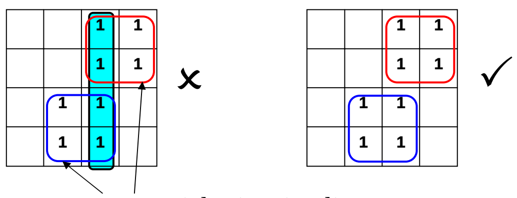
بدست آوردن ساده ترین فرم SOP

- برای بدست آوردن ساده ترین فرم SOP باید:
  - حداقل لیترال ها برای هر جمله ضربی بدست آید.
  - حداقل جملات ضربی داشته باشیم.
- در جدول کارنو موارد فوق بصورت زیر برآورده می شود:
  - *انتخاب گروههای بزرگتر تا حد ممکن یا انتخاب نخستین* (prime implicants)
  - حذف گروههای مازاد (*redundant groupings*)
- Implicant: جمله ضربی است که برای پوشش ۱ ها استفاده می شود.
- انتخاب نخستین (*prime implicant*): جمله ضربی است که با انتخاب بیشترین تعداد ممکن برای خانه های هم جوار بدست می آید(بزرگترین گروه ممکن).



بدست آوردن ساده ترین فرم SOP

- حذف گروه های مازاد (گروهی که تمام خانه های آن متعلق به گروههای دیگر نیز باشد.)



Essential prime implicants

- انتخاب نخستین اصلی (*essential prime implicant*) ، انتخاب نخستینی است که حداقل شامل یک مینترمی باشد که بوسیله سایرانتخابهای نخستین پوشش داده نشده باشد.

تمرین ۲-۳

Q. Identify the prime implicants and the essential prime implicants of the two K-maps below.

a \ bc	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	0	1	0	0

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		1
01			1	1
11	1	1		1
10	1		1	1

بدست آوردن ساده ترین فرم SOP

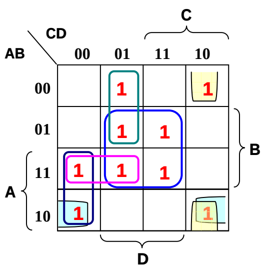
- Algorithm (non optimal):

1. Circle all prime implicants on the K-map.
2. Identify and select all essential prime implicants for the cover.
3. Select a minimum subset of the remaining prime implicants to complete the cover, that is, to cover those minterms not covered by the essential prime implicants.

بدست آوردن ساده ترین فرم SOP

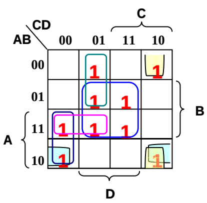
- Example:

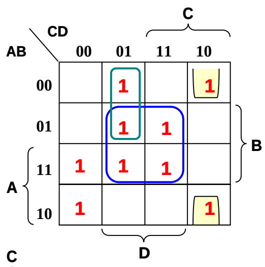
  $f(A,B,C,D) = \sum m(1,2,5,7,8,10,12,13,15)$



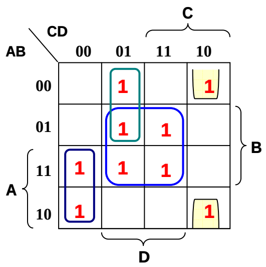
All prime implicants

بدست آوردن ساده ترین فرم SOP



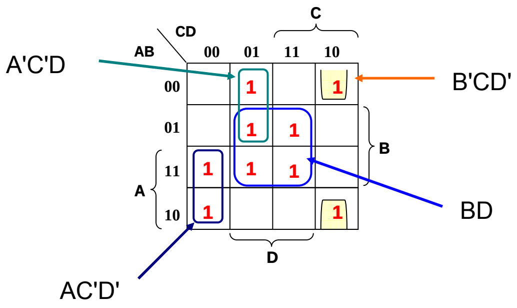


Essential prime implicants



Minimum cover

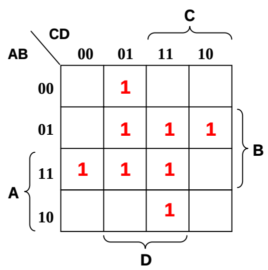
بدست آوردن ساده ترین فرم SOP



f(A,B,C,D) = BD + A'C'D + AC'D' + B'CD'

تمرین ۳-۳

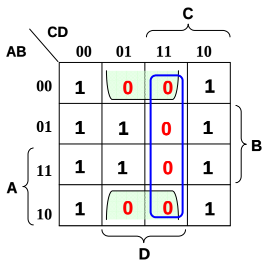
Q. Find the simplified expression for G(A,B,C,D).



بدست آوردن فرم POS

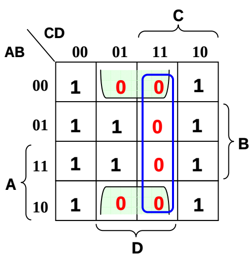
- عبارت ساده شده توسط جدول کارنو بطور معمول فرم SOP دارد. برای ساده سازی بفرم POS می توان ۰ ها را ساده کرد که متناظر با ماکسترمهای تابع هستند.
- Example:

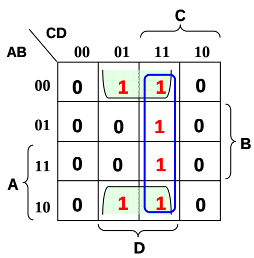
  $F=\sum m(0,2,4,5,6,8,10,12,13,14)$



بدست آوردن فرم POS

K-map of F





K-map of F'

- This gives the SOP of F' to be:

  F' = B'D + CD

- To get POS of F, we have:

  F = (B'D + CD)'

  = (B'D)'(CD)' DeMorgan

  = (B+D')(C'+D') DeMorgan

حالات بی اهمیت
Don't-care Conditions

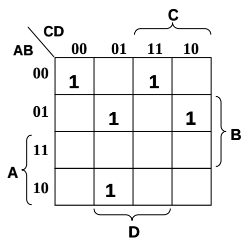
- در بعضی مسایل تعدادی از خروجی ها مشخص نمی شوند. چون این حالتها اتفاق نمی افتند، می تواند ۰ یا ۱ فرض گردند.
- این مینترمها حالات بی اهمیت نامیده می شوند و در جدول با x یا d نمایش داده می شوند.
- در ساده سازی توابع ، این حالتها بسیار مفید خواهند بود. بسته به ساده سازی ۰ ها یا ۱ ها می توان آنها را ۰ یا ۱ فرض کرده ودر گروهبندی استفاده کرد.
- Example: An odd parity generator for BCD code which has 6 unused combinations.

No.	A	B	C	D	P
0	0	0	0	0	**1**
1	0	0	0	1	**0**
2	0	0	1	0	**0**
3	0	0	1	1	**1**
4	0	1	0	0	**0**
5	0	1	0	1	**1**
6	0	1	1	0	**1**
7	0	1	1	1	**0**
8	1	0	0	0	**0**
9	1	0	0	1	**1**
10	1	0	1	0	X
11	1	0	1	1	X
12	1	1	0	0	X
13	1	1	0	1	X
14	1	1	1	0	X
15	1	1	1	1	X

حالات بی اهمیت

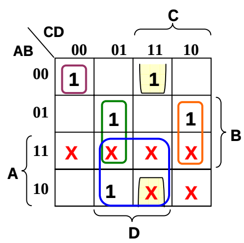
- For comparison:
  - ❖ WITHOUT Don't-cares:

    P = A'B'C'D' + A'B'CD + A'BC'D + A'BCD' + AB'C'D



  - ❖ WITH Don't-cares:

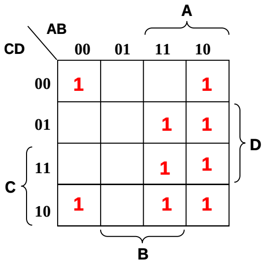
    P = A'B'C'D' + B'CD + BC'D + BCD' + AD



Examples

- Example #1:

  f(A,B,C,D) = A.B.C + B'.C.D' + A.D + B'.C'.D'



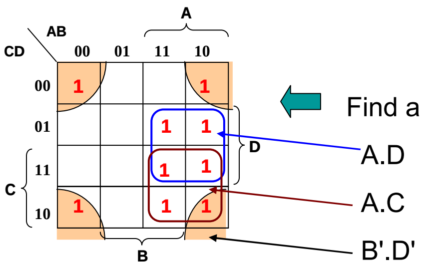
Fill in the 1's.

Examples

- Example #1:

  f(A,B,C,D) = A.B.C + B'.C.D' + A.D + B'.C'.D'

Find all PIs:

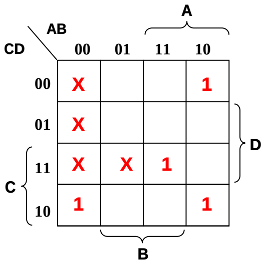


Are all '1's covered by the PIs? Yes, so the answer is: f(A,B,C,D) = A.D + A.C + B'.D'

Examples

- Example #2 (with don't cares):

  f(A,B,C,D) = $\sum$ *m*(2,8,10,15) + $\sum$ *d*(0,1,3,7)

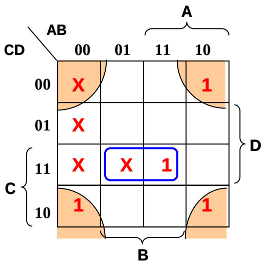


Fill in the 1's and X's.

Examples

- Example #2 (with don't cares):

  f(A,B,C,D) = $\sum$ *m*(2,8,10,15) + $\sum$ *d*(0,1,3,7)



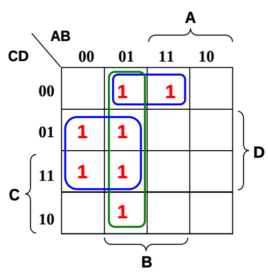
Do we need to have an additional term A'.B' to cover the 2 remaining x's?

No, because all the 1's (minterms) have been covered.

f(A,B,C,D) = B'.D' + B.C.D

Examples

- To find simplest POS expression for example #1:
  f(A,B,C,D) = A.B.C + B'.C.D' + A.D + B'.C'.D'
- Draw the K-map of the complement of f, f '.



From K-map,

f ' = A'.B + A'.D + B.C'.D'

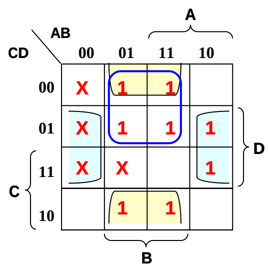
Using DeMorgan's theorem,

f = (A'.B + A'.D + B.C'.D')'

= (A+B').(A+D').(B'+C+D)

Examples

- To find simplest POS expression for example #2:
  f(A,B,C,D) = $\sum m(2,8,10,15) + \sum d(0,1,3,7)$
- Draw the K-map of the complement of f, f '.
  f '(A,B,C,D) = $\sum m(4,5,6,9,11,12,13,14) + \sum d(0,1,3,7)$



From K-map,

f ' = B.C' + B.D' + B'.D

Using DeMorgan's theorem,

f = (B.C' + B.D' + B'.D)'

= (B'+C).(B'+D).(B+D')

Quine-McCluskey روش جدول بندی

- Quine-McCluskey Method is a step-by-step procedure which is guaranteed to produce a simplified standard form for given function.
- Advantages:
  - can be applied to problems of many variables
  - suitable for machine computation
- BUT tedious and prone-to-errors for humans.

Introduction

- Relies on repeated applications on terms using Unifying Theorem:

  $\alpha x\beta + \alpha x'\beta = \alpha\beta$

  where α and β stand for product terms;

  Example: wxyz + wx'yz = wyz
- Using *binary representations* (for the product terms), above theorem correspond to:

  $\alpha 1\beta + \alpha 0\beta = \alpha\text{-}\beta$

Examples:	111 + 101 = 1-1	(abc + ab'c = ac)
	101 + 100 = 10-	(ab'c + ab'c' = ab')
	11-10 + 11-00 = 11--0	(abde' + abd'e' = abe')

Introduction

- Two steps procedure:
  - ❖ Find all prime implicants
  - ❖ Smallest set of prime implicants to cover the minterms of function

Determining the Prime Implicants

- Consider a 4-variable function.

  $F(A,B,C,D) = \sum m(0,1,4,5,9,11,14,15)$
- Procedure:
  - ❖ Arrange the minterms in groups according to the number of 1s (see Column 1)
  - ❖ Combine terms from adjacent groups which differ by only 1 bit. (see Column 2)
  - ❖ Repeat step 2 with a new set of terms (see Column 3); until no further combinations are possible.

Determining the Prime Implicants

Column 1			*Column 2*			*Column 3*		
0	0000	✓✓	0, 1	000-	✓	0,1,4,5	0-0-	
1	0001	✓✓✓	0, 4	0-00	✓			
4	0100	✓✓	1, 5	0-01	✓			
5	0101	✓✓	1, 9	-001				
9	1001	✓✓	4, 5	010-	✓			
11	1011	✓✓	9,11	10-1				
14	1110	✓	11,15	1-11				
15	1111	✓✓	14,15	111-				

- The prime implicants (PIs) are those without a tick mark, namely: {-001, 10-1, 1-11, 111-, 0-0-}
  or {B'C'D, AB'D, ACD, ABC, A'C'}

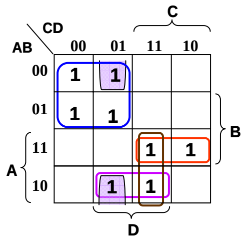
What are these Prime Implicants?

- A prime implicant (PI) is a product term obtained by combining the maximum possible number of minterms from adjacent squares in the map.
- Largest groupings of minterms in K-map correspond to prime implicants.

What are these Prime Implicants?

- For comparison, the equivalent K-map with the various groupings of minterms are as follows:

Column 1		*Column 2*		*Column 3*	
0	0000 ✓✓	0, 1	000- ✓	0,1,4,5	0-0- ⬅
1	0001 ✓✓✓	0, 4	0-00 ✓		
4	0100 ✓✓	1, 5	0-01 ✓		
5	0101 ✓✓	1, 9	-001 ⬅		
9	1001 ✓✓	4, 5	010- ✓		
11	1011 ✓✓	9,11	10-1 ⬅		
14	1110 ✓	11,15	1-11 ⬅		
15	1111 ✓✓	14,15	111- ⬅		

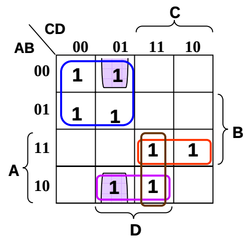


What are these Prime Implicants?

- For comparison, the equivalent K-map with the various groupings of minterms are as follows:

Note that some of these groupings (prime implicants) are *redundant*.

So we need to find the minimum set which would cover all minterms – step 2 of the tabulation technique.



Selecting a Minimum Set

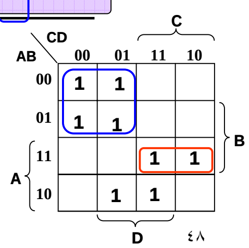
- Next step is to select a minimum set of prime implicants to represent the function – the covering problem.
- Prepare a table for prime-implicant vs minterms – a prime implicant chart (PI Chart):

		0	1	4	5	9	11	14	15
1,9	-001		X			X			
9,11	10-1					X	X		
11,15	1-11						X		X
14,15	111-							X	X
0,1,4,5	0-0-	X	X	X	X				

Selecting a Minimum Set

- Choose essential prime implicants (EPIs) – those with unique minterm in it (i.e. single minterm in the column).

		✓		✓	✓			✓	
		0	1	4	5	9	11	14	15
1,9	-001		X			X			
9,11	10-1					X	X		
11,15	1-11						X		X
14,15	111-							X	X
0,1,4,5	0-0-	X	X	X	X				



- Unique minterms: 0,4,5,14
- Therefore, EPIs are: A'C', ABC.

Selecting a Minimum Set

		✓		✓	✓			✓	
		0	1	4	5	9	11	14	15
1,9	-001		X			X			
9,11	10-1					X	X		
11,15	1-11						X		X
➡ 14,15	111-							X	X
➡ 0,1,4,5	0-0-	X	X	X	X				

- Remove rows of essential prime implicant (EPIs) and columns of minterms covered by these EPIs, to give a reduced PI chart:

		9	11
1,9	-001	X	
9,11	10-1	X	X
11,15	1-11		X

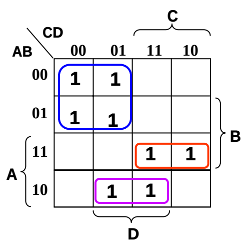
Selecting a Minimum Set

- Next, select one or more prime implicants which would cover all the remaining minterms. (namely, AB'D)

		9	11
1,9	-001	X	
➡ 9,11	10-1	X	X
11,15	1-11		X

- Hence, minimum set of prime implicants to cover all the minterms is { A'C', ABC, AB'D }

  F = A'C' + ABC + AB'D



Another Example

- Try tabulation technique with function:

  $F(A,B,C,D) = \Sigma\, m(2,4,6,8,9,10,12,13,15)$

Column 1			*Column 2*			*Column 3*		
2	0010	✓	2,6	0-10	PI_2	8,9,12,13	1-0-	PI_1
4	0100	✓	2,10	-010	PI_3			
8	1000	✓	4,6	01-0	PI_4			
6	0110	✓	4,12	-100	PI_5			
9	1001	✓	8,9	100-	✓			
10	1010	✓	8,10	10-0	PI_6			
12	1100	✓	8,12	1-00	✓			
13	1101	✓	9,13	1-01	✓			
15	1111	✓	12,13	110-	✓			
			13,15	11-1	PI_7			

Another Example

- Prime implicants: 1-0-, 0-10, -010, 01-0, -100, 10-0, 11-1

  or AC', A'CD', B'CD', A'BD', BC'D', AB'D', ABD

						✓				✓
		2	4	6	8	9	10	12	13	15
➡ 8,9,12,13	1-0-				X	X		X	X	
2,6	0-10	X		X						
2,10	-010	X					X			
4,6	01-0		X	X						
4,12	-100		X					X		
8,10	10-0				X		X			
➡ 13,15	11-1								X	X

- EPIs: 1-0-, 11-1 or AC', ABD

Another Example

		2	4	6	8	9 ✓	10	12	13	15 ✓
➡ 8,9,12,13	1-0-				X	X		X	X	
2,6	0-10	X		X						
2,10	-010	X					X			
4,6	01-0		X	X						
4,12	-100		X					X		
8,10	10-0				X		X			
➡ 13,15	11-1								X	X

EPIs: AC', ABD

- Reduced PI chart

		2	4	6	10
2,6	0-10	X		X	
➡ 2,10	-010	X			X
➡ 4,6	01-0		X	X	
4,12	-100		X		
8,10	10-0				X

F = AC' + ABD + B'CD' + A'BD'

Another Example

- Questions:
  - ❖ How would you obtain *simplified product-of-sums* (POS) expressions with the tabulation technique?
  - ❖ How would you handle *"don't care" conditions* in an incompletely specified function?

Rules for Table Reduction

- After obtaining the EPIs, the rules for PI chart reduction are:
  - ❖ **Rule 1**: A row that *is covered by* another row may be eliminated from the chart. When identical rows are present, all but one of the rows may be eliminated.
  - ❖ **Rule 2**: A column that *covers* another column may be eliminated. All but one column from a set of identical columns may be eliminated.

Rules for Table Reduction

- Example: Given this reduced PI chart:

		5	10	11	13
1,5,9,13	--01	X			X
~~5,7,13,15~~	~~-1-1~~	X			X
8,9,10,11	10--		X	X	
9,11,13,15	1--1			X	X
~~10,11,14,15~~	~~1-1-~~		X	X	

➡

		5	10
1,5,9,13	--01	X	
8,9,10,11	10--		X

- *Apply rule 1*: 2nd and 5th rows can be eliminated.
- *Apply rule 2*: 3rd and 4th columns can be eliminated.

Incompletely Specified Functions

- Functions with “don’t-cares”.
  - Step 1: Finding prime implicants (no change).
  - Step 2: PI chart – omit the don’t-cares.
- Example:

$$F(A,B,C,D,E) = \Sigma\, m(2,3,7,10,12,15,27) + \Sigma\, d(5,18,19,21,23)$$

Incompletely Specified Functions

$F(A,B,C,D,E) = \Sigma\, m(2,3,7,10,12,15,27) + \Sigma\, d(5,18,19,21,23)$

Column 1			*Column 2*			*Column 3*		
2	00010	✓	2,3	0001-	✓	2,3,18,19	-001-	PI_1
3	00011	✓	2,10	0-010	PI_4	3,7,19,23	-0-11	PI_2
5	00101	✓	2,18	-0010	✓	5,7,21,23	-01-1	PI_3
10	01010	✓	3,7	00-11	✓			
12	01100	PI_7	3,19	-0011	✓			
18	10010	✓	5,7	001-1	✓			
7	00111	✓	5,21	-0101	✓			
19	10011	✓	18,19	1001-	✓			
21	10101	✓	7,15	0-111	PI_5			
15	01111	✓	7,23	-0111	✓			
23	10111	✓	19,23	10-11	✓			
27	11011	✓	19,27	1-011	PI_6			
			21,23	101-1	✓			

PI chart

	2	3	7	10 ✓	12 ✓	15 ✓	27 ✓
PI_1	X	X					
PI_2		X	X				
PI_3			X				
PI_4	X			X			
PI_5			X			X	
PI_6							X
PI_7					X		

EPIs: PI_4, PI_5, PI_6 and PI_7.

$F = PI_1 + PI_4 + PI_5 + PI_6 + PI_7$ or
$PI_2 + PI_4 + PI_5 + PI_6 + PI_7$

Reduced PI chart:

	3
PI_1	X
PI_2	X

Review – Quine-McCluskey Technique

- Relies on unifying theorem:

$$\alpha x\beta + \alpha x'\beta = \alpha\beta$$

- Procedure:
- (i) Find all prime implicants
  - arrange minterms according to the number of 1s.
  - exhaustively combine pairs of terms from adjacent groups which differ by 1 bit, to produce new terms.
  - tick those terms which have been selected.
  - repeat with new set of terms until none possible.
  - terms which are unticked are the prime implicants.

Review – Quine-McCluskey Technique

- (ii) select smallest set to cover function
  - prepare prime-implicants chart.
  - select essential prime implicants for which one or more of its minterms are unique (only once in the column).
  - obtain a new reduced PI chart for remaining prime-implicants and the remaining minterms.
  - select one or more of remaining prime implicants which will cover all the remaining minterms.

Review – Quine-McCluskey Technique

- Example:

  F(A,B,C,D) = Σ *m*(0,1,4,5,9,11,14,15)

Column 1			*Column 2*			*Column 3*	
0	0000	✓✓	0, 1	000-	✓	0,1,4,5	0-0-
1	0001	✓✓✓	0, 4	0-00	✓		
4	0100	✓✓	1, 5	0-01	✓		
5	0101	✓✓	1, 9	-001			
9	1001	✓✓	4, 5	010-	✓		
11	1011	✓✓	9,11	10-1			
14	1110	✓	11,15	1-11			
15	1111	✓✓	14,15	111-			

Review – Quine-McCluskey Technique

- The prime implicants (those without a tick mark) are:

  { B'C'D, AB'D, ACD, ABC, A'C' }

		0	1	4	5	9	11	14	15
1,9	-001		X			X			
9,11	10-1					X	X		
11,15	1-11						X		X
14,15	111-							X	X
0,1,4,5	0-0-	X	X	X	X				

- Essential prime implicants : ABC, A'C'

- F = ABC + A'C' + AB'D

		9	11
1,9	-001	X	
9,11	10-1	X	X
11,15	1-11		X